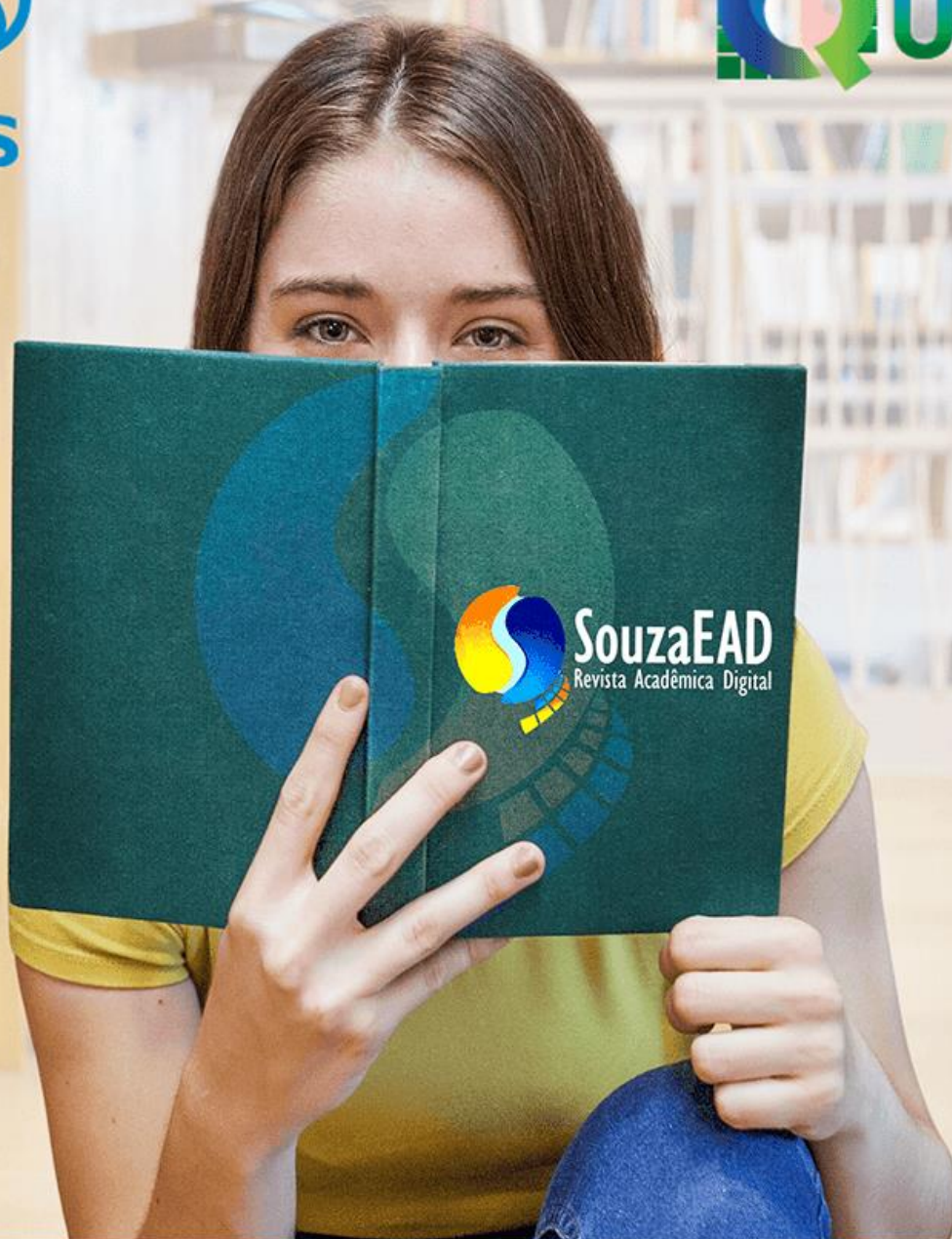




**VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS DE UMA PLACA DE ACRÍLICO
FLETIDA ATRAVÉS DA METODOLOGIA TEÓRICA E EMPÍRICA
VALIDATION OF NUMERICAL RESULTS FOR A FLEXED ACRYLIC PLATE
USING THEORETICAL AND EMPIRICAL METHODOLOGY**

JUNIOR, Paulo Marques do Lago¹

RESUMO

Nos problemas de engenharia estrutural, enfrentados rotineiramente, não é usual o emprego de métodos empíricos, sendo necessário o conhecimento da teoria para compreender determinado fenômeno e, quando esta não é passível de ser aplicada ou até mesmo inexistente, a modelagem numérica, através do método dos elementos finitos (MEF), surge como uma solução. Através de uma abordagem clara e concisa, este artigo explora a aplicação desses três enfoques, destacando as suas vantagens e limitações ao se analisar uma placa de acrílico presa em uma de suas extremidades e livre na outra, a qual foi submetida a sucessivos carregamentos de cargas com diferentes intensidades. Os resultados alcançados demonstram que se pode obter vantagens do uso de técnicas computacionais quando há domínio do problema envolvido.

Palavras-chave: Acrílico. Análise experimental. Elementos finitos. Estruturas.

ABSTRACT

In the structural engineering problems, we face on a routine basis, it is not usual to use empirical methods, and it is necessary to know the theory in order to understand a given phenomenon, and when this cannot be applied or even does not exist, numerical modeling, using the finite element method (FEM), emerges as a solution. Using a clear and concise approach, this article explores the application of these three approaches, highlighting their advantages and limitations when analyzing an acrylic plate clamped at one end and free at the other, which was subjected to successive loads of different intensities. The achieved results show that the use of computational techniques can be advantageous when there is mastery of the problem involved.

Keywords: Acrylic. Experimental analysis. Finite elements. Structures.

1. INTRODUÇÃO

O polimetilmetacrilato (PMMA), também conhecido como acrílico, é um termoplástico transparente. É frequentemente utilizado em forma de folha devido às

¹ Engenheiro Civil pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais e Mestrando em Engenharia Civil pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). E-mail: paulolago7@yahoo.com.br

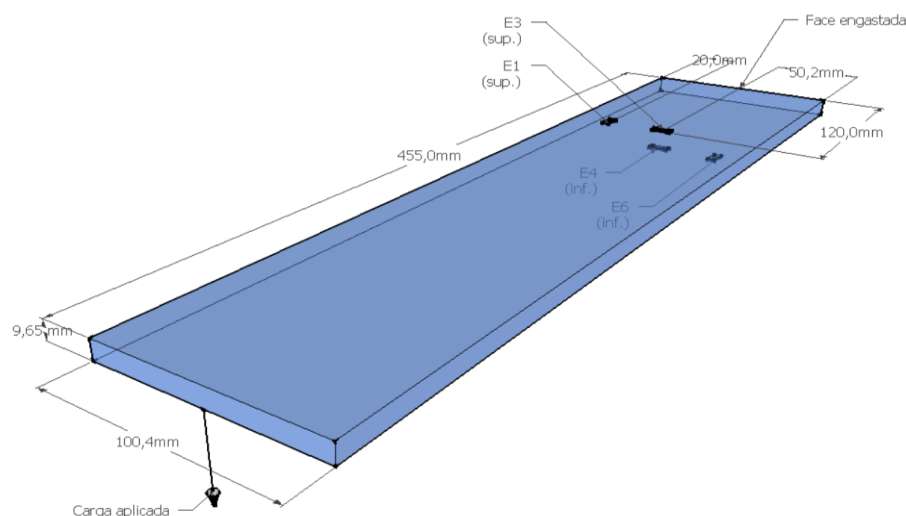
suas propriedades, tais como leveza e resistência ao estilhaçamento, como alternativa ao vidro servindo, frequentemente, como uma alternativa econômica ao policarbonato.

Segundo Pawar (2016), as placas de PMMA não perdem a sua estabilidade e resistência ao impacto, o que as torna um material muito adequado para a arquitetura e a construção civil. São utilizadas em várias aplicações e devido à sua excelente resistência ao impacto, aos produtos químicos, aos raios UV e em todas as condições meteorológicas, permite a criação de designs de superfícies originais e impressionantes para fachadas.

Em seus estudos relacionados ao desempenho estrutural das placas de PMMA em engenharia subaquática, Du *et al.* (2023) realizaram uma série de análises numéricas considerando o impacto de um projétil na estrutura de uma placa de PMMA. Para tanto eles adotaram, como características mecânicas do material da placa de PMMA, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson iguais a 3300 MPa e 0,35, respectivamente.

Haja vista a sua alta aplicabilidade na construção civil, o objetivo principal deste trabalho consistiu em realizar a modelagem de uma placa de PMMA, através da utilização do software PrePomax (Versão 2.3.6, Matej Borovinšek, 2025), conforme o modelo representado pela Figura 1, e submetê-la a diferentes incrementos de cargas para, posteriormente, comparar os resultados obtidos para os deslocamentos e deformações, na extremidade livre da placa e na região do extensômetro E1, respectivamente, através do método dos elementos finitos (MEF), via software PrePomax (2025), com os resultados determinados de forma empírica e teórica.

Figura 1 – Modelo da placa de PMMA



Fonte: Elaborado pelo autor.

1.1. Referencial Teórico

1.1.1. Definição de transdutores e extensômetros

Na resolução de problemas de engenharia, são comumente aplicáveis os seguintes métodos: teórico e experimental. O segundo, menos comum e mais difícil de ser idealizado, pode ser realizado com o auxílio de dispositivos tais como o transdutor e o extensômetro.

Com relação aos transdutores de deslocamentos, Almeida (2004, p.1) afirma que “o transdutor é qualquer dispositivo capaz de transformar um tipo de sinal em outro para permitir o controle de processos físicos, ou realizar uma medição”. A Figura 2 (a) mostra um transdutor indutivo utilizado na obtenção de medidas de deslocamentos, conhecido como linear variable differential transformer (LVDT).

Já os medidores de deformação, chamados extensômetros elétricos, são dispositivos capazes de transformar pequenas variações nas dimensões em variações equivalentes, através da sua resistência elétrica. Dentre as características dos extensômetros destaca-se: alta precisão e excelentes respostas aos fenômenos dinâmicos, podendo ser usados na medição de quantidades físicas tais como força, pressão, torque, aceleração, deslocamento. A Figura 2 (b) mostra um extensômetro de fio comumente utilizado em experimentos realizados em diversos laboratórios.

Figura 2 – (a) Transdutor de deslocamentos e (b) Extensômetro



(a)



(b)

Fonte: Arquivo pessoal.

1.1.2. Teoria da elasticidade aplicada a materiais isotrópicos

Segundo Adel S. Saada (2014), um material isotrópico possui propriedades elásticas que são independentes das orientações dos eixos, como é o caso do PMMA. A matriz de flexibilidade de um material que apresenta essas características é dada por:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (1)$$

sim.

Onde

E = módulo de elasticidade

ν = coeficiente de Poisson

G = módulo de elasticidade transversal

Haja vista que a matriz de rigidez $[C]$ é a inversa da matriz de flexibilidade, ou seja, $[C] = [S]^{-1}$, para Martin H. Sadd (2005), a forma geral da lei de Hooke é dada por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \quad (2)$$

Onde

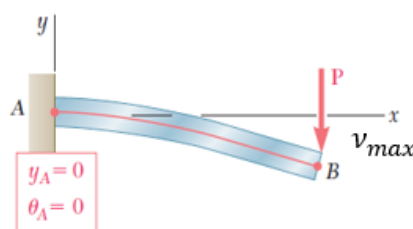
σ_{ij} = vetor de tensões

C_{ijkl} = matriz de rigidez

e_{kl} = vetor de deformações

Sendo dessa forma, o problema que será tratado neste trabalho pode ser exemplificado pelo esquema da estrutura demonstrada na Figura 3.

Figura 3 – Viga em balanço



Fonte: Adaptado de Beer et al. (2015).

Segundo Hibbeler (2013), a flecha máxima (v_{max}) para uma viga em balanço contendo uma carga concentrada aplicada em sua extremidade, pode ser dada por:

$$v_{max} = \frac{-PL^3}{3EI_z} \quad (3)$$

Onde

P = carga aplicada

L = comprimento da barra em balanço

I_z = momento de inércia em relação ao eixo z

Já Botelho (2014), define em sua literatura, assim como outros autores, que a inércia (I_z) de um elemento que possui seção transversal retangular pode ser dada por:

$$I_z = \frac{bd^3}{12} \quad (4)$$

Onde

b = medida da base da seção retangular

d = medida da altura da seção retangular

A expressão que permite calcular as tensões normais provocadas por momento fletor M_z , oriundo de cargas cujo plano que as contém coincide com o plano xy , segundo Assan (2015), é dada por:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y \quad (5)$$

Onde

σ = tensão normal devido à flexão

M_z = momento fletor em torno do eixo z

y = distância do CG da seção ao ponto da tensão

Para finalizar, em Hibbeler (2013), encontramos que a tensão (σ), dada pela Lei de Hooke, o coeficiente de Poisson (ν) e o módulo de elasticidade transversal (G), podem ser expressos de forma matemática, respectivamente, por:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (6)$$

$$\nu = \frac{\varepsilon_{lat}}{\varepsilon_{long}} \quad (7)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (8)$$

Onde

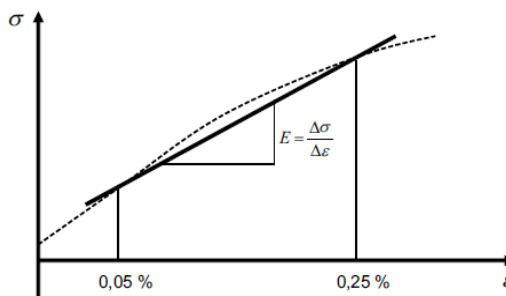
ε_{lat} = deformação específica lateral

ε_{long} = deformação específica longitudinal

1.1.3. Conceitos normativos

Encontramos na metodologia exposta pela International Organization for Standardization (ISO 527-1:2012), que uma das formas de se obter o módulo de elasticidade de um material constituído por plástico, é através do gráfico tensão-deformação, representado pela Figura 4.

Figura 4 – Gráfico tensão-deformação para um material constituído por plástico



Fonte: ISO 527-1:2012.

Então, o módulo de elasticidade do material pode ser dado por:

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \quad (9)$$

Onde

$\Delta\sigma$ = variação da tensão

$\Delta\varepsilon$ = variação da deformação

Ainda de acordo com a metodologia exposta pela ISO 527-1 (2012), o coeficiente de Poisson pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$\nu = \frac{\Delta\varepsilon_n}{\Delta\varepsilon_1} \quad (10)$$

Onde

$\Delta\varepsilon_n$ = decréscimo de deformação transversal

$\Delta\varepsilon_1$ = acréscimo de deformação longitudinal

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Os materiais fundamentais utilizados para a coleta de dados, bem como as informações necessárias à reprodução do experimento idealizado pela Figura 1 para atingir os objetivos deste trabalho, consistiu nas seguintes etapas:

I. Colocação de 4 extensômetros localizados a 120 mm da extremidade fixa da placa de PMMA. Os extensômetros E1 e E3 foram posicionados na superfície superior, sentidos longitudinal e transversal da placa, respectivamente. Já os extensômetros E4 e E6 foram posicionados na superfície inferior, sentidos transversal

e longitudinal da placa, respectivamente, conforme Figura 5 (a). Apenas o extensômetro E1 foi habilitado a transmitir os dados captados.

II. A placa foi presa por meio de parafusos em uma das suas extremidades, de forma a impedir a sua translação e rotação neste ponto.

III. O LVDT foi posicionado na outra extremidade livre da placa e posteriormente calibrado, conforme Figura 5 (b).

Figura 5 – (a) Extensômetros fixados na placa e (b) LVDT posicionado na extremidade livre da placa de PMMA



(a)



(b)

Fonte: Arquivo pessoal.

IV. Na extremidade livre da placa foi posicionada um cesto metálico, conforme Figura 6 (a), o qual teve seu peso preliminarmente aferido em 2,25 N.

V. Concluída a ligação do extensômetro E1 e do transdutor ao aquisitor de dados, conforme Figura 6 (b), foram realizados 6 incrementos de cargas, totalizando em 18,25 N, inclusive o cesto, da seguinte forma: 2,25 N, 2,00 N, 2,00 N, 5,00 N, 5,00 N e 2,00 N.

VI. As informações de deformações coletadas pelo aquisitor de dados, através do extensômetro E1, e da flecha na extremidade livre da viga, pelo LVDT, foram armazenadas pelo equipamento e posteriormente transferidas para uma planilha eletrônica e podem ser conferidas na Tabela 1.

Figura 6 – (a) Placa, transdutor e extensômetros devidamente posicionados e aptos a receberem carga e (b) Aquisitor de dados conectado ao notebook



(a)



(b)

Fonte: Arquivo pessoal.

VII. Inserindo-se os valores das seis cargas do experimento na Equação (5), obteve-se os respectivos valores de tensão na região do extensômetro E1. Os valores de tensão encontrados foram aplicados na Equação (6) com os respectivos valores experimentais de deformação, obtendo-se, assim, seis valores para o módulo de elasticidade do material da placa de PMMA, sendo adotado o valor médio.

VIII. O modelo numérico da placa de PMMA no software PrePomax (2025) foi idealizado através da utilização de um objeto do tipo sólido, malha de elementos finitos com discretização do tipo transfinita e elementos com tamanhos mínimo e máximo entre 0,5 e 15,0 mm, respectivamente. Foi adotado o resolvido padrão Pardiso.

IX. O valor do módulo de elasticidade, determinado a partir dos resultados empíricos, foi aplicado na Equação 2 e no software PrePomax (2025) para a obtenção das deformações, tensões e deslocamentos, finalizando com a comparação de todos os resultados.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após a execução das etapas I a V do experimento, conforme descritas no tópico anterior, a placa de PMMA apresentou a configuração deformada que pode ser visualizada na Figura 7.

Figura 7 – Placa de acrílico deformada



Fonte: Arquivo pessoal.

A Tabela 1 traz os dados experimentais, sendo a flecha na extremidade livre da placa, coletada pelo LVDT, e a deformação no extensômetro E1, representados pelas letras gregas δ e ϵ 1, respectivamente.

Tabela 1 - Resultados experimentais

Incremento de carga	Carga (N)	Acumulado. (N)	δ^1 (mm)	ϵ^1 1 (μ mm)
1	2,25	2,25	3,410	195,253
2	2,00	4,25	5,500	316,847
3	2,00	6,25	7,510	424,582
4	5,00	11,25	15,330	815,976
5	5,00	16,25	22,660	1.233,098
6	2,00	18,25	23,700	1.287,781

Fonte: Arquivo pessoal.

O módulo de elasticidade para o material da placa de PMMA foi estimado a partir dos resultados experimentais, conforme método VII, obtendo-se o seguinte valor:

$$E = 2.871,07 \text{ MPa}$$

O coeficiente de Poisson para o material da placa de PMMA foi atribuído com base nas informações do trabalho realizado por Du *et al.* (2023):

$$\nu = 0,35$$

O módulo de elasticidade transversal para o material da placa de acrílico foi estimado a partir dos dois resultados encontrados anteriormente e aplicados à Equação (8), obtendo-se o seguinte valor:

$$G = 1.063,36 \text{ MPa}$$

Embora o módulo de elasticidade determinado empiricamente neste trabalho seja diferente daquele proposto no estudo realizado por Du *et al.* (2023), ou seja, 3300 MPa, optou-se por utilizar o valor de 2.871,07 MPa, uma vez que o resultado é conservador e pode trazer confiabilidade ao estudo.

A partir desses valores encontrados, determinou-se a matriz de flexibilidade (S), através da aplicação da Equação (1), e a de rigidez (K) para o elemento estrutural:

$$S = \begin{bmatrix} 3,48 & -1,22 & -1,22 & 0 & 0 & 0 \\ -1,22 & 3,48 & -1,22 & 0 & 0 & 0 \\ -1,22 & -1,22 & 3,48 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 9,40 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 9,40 & 0 \\ & & & & & 9,40 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$K = \begin{bmatrix} 4,60 & 2,48 & 2,48 & 0 & 0 & 0 \\ 2,48 & 4,60 & 2,48 & 0 & 0 & 0 \\ 2,48 & 2,48 & 4,60 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1,06 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 1,06 & 0 \\ & & & & & 1,06 \end{bmatrix} \times 10^3$$

As deformações foram calculadas pela Equação (11), onde houve uma inversão dos termos da Equação (2).

$$e_{kl} = S_{ijkl} \sigma_{ij} \quad (11)$$

A Tabela 2 mostra os resultados teóricos obtidos a partir da aplicação das Equações de (1) a (8), inclusive a (11).

Tabela 2 - Resultados teóricos

Incremento de carga	σ (N/mm²)	δ^2 (mm)	$\epsilon 1^2$ (μ mm)
1	0,480	3,127	167,185
2	0,906	5,907	315,562
3	1,333	8,686	464,287
4	2,399	15,635	835,577
5	3,465	22,584	1.206,867

6

3,891

25,364

1.355,244

Fonte: Arquivo pessoal.

Já os resultados numéricos, obtidos através do software PrePomax (2025), podem ser conferidos com base na Tabela 3.

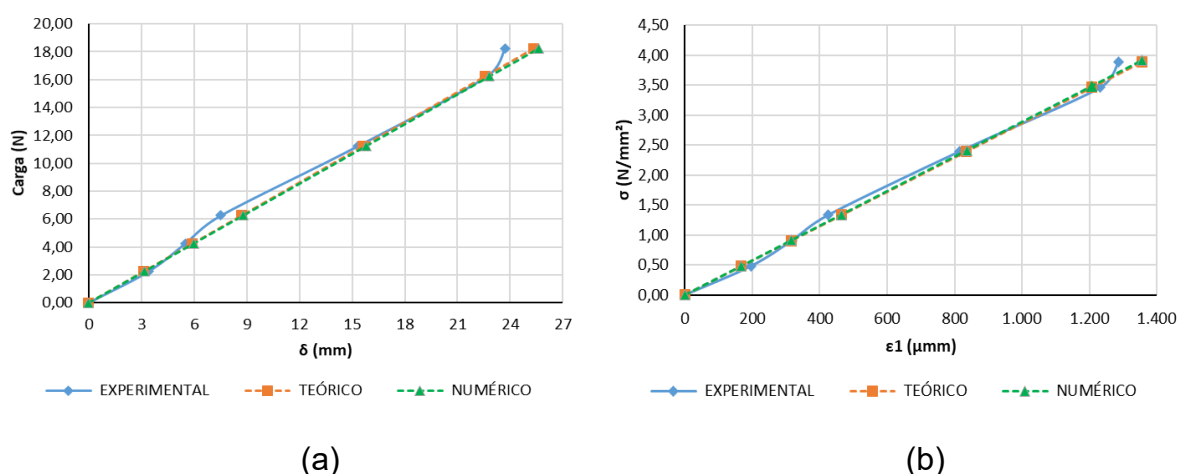
Tabela 3 - Resultados numéricos

Incremento de carga	σ (N/mm ²)	δ^3 (mm)	ϵ^1 (μ mm)
1	0,482	3,160	167,298
2	0,911	5,968	316,008
3	1,340	8,777	464,717
4	2,412	15,800	836,491
5	3,484	22,822	1.208,260
6	3,913	25,631	1.356,970

Fonte: Arquivo pessoal.

A comparação entre os resultados obtidos de forma experimental, teórica e numérica, podem ser melhor visualizados quando agrupados através dos gráficos representados pelas Figuras 8 (a) e (b).

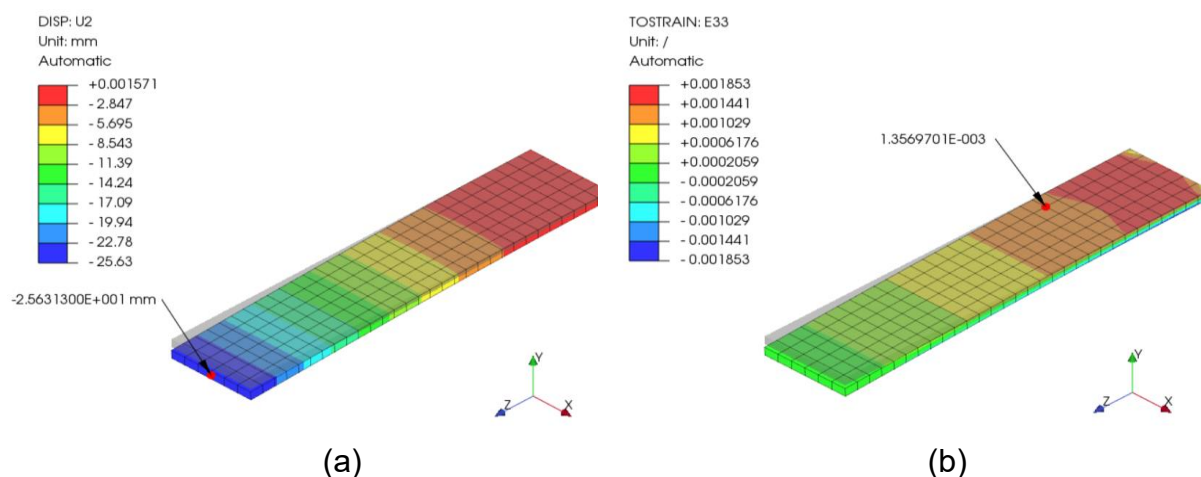
Figura 8 – (a) Gráfico da Carga x Deslocamento e (b) Gráfico da Tensão x Deformação



Fonte: Elaborado pelo autor.

As Figuras 9 (a) e (b) mostram os resultados numéricos obtidos para a flecha, na extremidade livre da placa de PMMA, e para a deformação na região do extensômetro E1, ambos devido ao carregamento da carga concentrada máxima de 18,25 N. As escalas numéricas, à esquerda das figuras, relacionam os deslocamentos e deformações às respectivas cores ao longo da placa. Já o deslocamento denominado U2 e a deformação E33, são referentes ao eixo y e z, respectivamente. Nota-se que a curvatura da placa de PMMA na região de maior deslocamento vertical é condizente com a curvatura observada no experimento e que as deformações, embora não sejam perceptíveis à olho nu, elas se intensificam na região próxima aos apoios, ou seja, na região do gráfico com escala na cor vermelha.

Figura 9 – Resultados da simulação numérica devido à carga máxima aplicada para (a) Deslocamento e (b) Deformação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Tabela 4 é possível verificar uma comparação entre os resultados presentes nas Tabelas 1, 2 e 3 através da razão entre os deslocamentos e deformações, teóricos e numéricos, pelos respectivos valores experimentais. A baixa divergência encontrada para os valores médios (μ) aliada aos baixos valores obtidos para os parâmetros estatísticos desvio padrão (s) e erro padrão (EP), demonstraram uma boa aderência dos resultados numéricos aos teóricos e aos experimentais.

Tabela 4 - Comparação dos resultados teóricos e numéricos com os experimentais

Incremento De carga	δ^2/δ^1	δ^3/δ^1	$\epsilon^{1^2}/\epsilon^{1^1}$	$\epsilon^{1^3}/\epsilon^{1^1}$
1	0,917	0,927	0,856	0,857
2	1,074	1,085	0,996	0,997
3	1,157	1,169	1,094	1,095
4	1,020	1,031	1,024	1,025
5	0,997	1,007	0,979	0,980
6	1,070	1,081	1,052	1,054
μ	1,039	1,050	1,000	1,001
s	0,081	0,082	0,081	0,082
EP	0,033	0,034	0,033	0,033

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados apresentados nesta seção demonstram a eficácia do LVDT e do extensômetro, para a captação dos deslocamentos e das deformações no experimento realizado com a placa de PMMA, quando comparados com os resultados teóricos e numéricos.

4. CONCLUSÕES

A presente pesquisa demonstrou que os métodos numéricos, através da utilização de softwares que empregam uma abordagem direcionada ao MEF, quando aplicados às estruturas, podem conduzir a resultados satisfatórios, porém demandam um conhecimento mais aprimorado por parte do usuário. Contudo, é um ótimo aliado na resolução de problemas de engenharia.

A comparação dos resultados obtidos, através do MEF e das metodologias analíticas existentes na literatura, com os resultados experimentais, aliado aos valores encontrados para o desvio padrão e o erro padrão, revelou que houve uma boa convergência entre os resultados referentes aos deslocamentos e deformações, reforçando, assim, a acurácia dos métodos empregados.

Com base no aumento da utilização do MEF pelos profissionais de engenharia, os resultados obtidos contribuem para uma melhor perspectiva sobre a importância do emprego dos métodos analíticos para a comparação com resultados numéricos, quando houver a impossibilidade da materialização do problema de forma empírica.

5. REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Dr. Pedro Afonso de Oliveira. Transdutores para medidas de deslocamentos lineares. P. 1-21, USP São Paulo, 2004. Disponível em: <https://www.docsity.com/pt/docs/transdutores-3/4703782/>

ASSAN, Aloisio Ernesto. Resistência dos materiais. 1. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2015.

BEER, Ferdinand P.; JUNIOR, E. Russell Johnston; DEWOLF, John T.; MAZUREK, David F. Mechanics of Materials. 7. ed. New York: MC Graw Hill Education, 2015.

BOTELHO, Manoel Henrique Campos. Resistência dos materiais para entender e gostar. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2014.

DOEBELIN, Ernest O. Measurement systems application and design. 4. ed. Nova York, 1990.

DU, Qinghai; LIU, Fengyou; Lei, Qi. Numerical simulation of PMMA impact based on the J-C constitutive and damage models under hydrostatic pressure loading. Applied Sciences, 13, 8640, p. 01–21, 2023.

HIBBELER, Russel Charles. Resistência dos materiais. 7. ed. São Paulo: Pearson, 2013.

ISO 527-1:2012. International Organization for Standardization. ISO 527-1:2012: Plastics – Determination of tensile properties. Switzerland, 2012.

MATEJ BOROVIŇSEK Copyright (C) 2025. PrePomax. Versão 2.3.6: KIMM – Korean Institute of Machinery & Materials; SmartDo – Smart Design Optimization. Disponível em: <https://prepomax.fs.um.si/downloads/>

PAWAR, Eshwar. A review article on acrylic PMMA. Journal of Mechanical and Civil Engineering, vol. 13, v. I, p. 01–04, 2016.

SAADA, Adel S. Elasticity theory and applications. 2. ed. India, 2014.

SADD, Martin H. Elasticity theory, applications and numerics. 1. ed. USA, 2005.