



**O QUINTO POSTULADO E A REVOLUÇÃO DAS GEOMETRIAS NÃO-
EUCLIDIANAS**
**THE FIFTH POSTULATE AND THE REVOLUTION OF NON-EUCLIDEAN
GEOMETRIES**

GREGORUTTI, Juliana de Lima¹

RESUMO

Retratamos o desenvolvimento histórico do Quinto Postulado de Euclides e sua influência na construção das Geometrias Não-Euclidianas, bem como as implicações desse avanço para o ensino da Matemática. Para isso, percorremos a trajetória da investigação que envolve desde a sistematização euclidiana até os estudos de Saccheri, Lambert, Gauss, Bolyai, Lobachevsky e Riemann, destacando os diferentes caminhos que levaram à formulação das geometrias hiperbólica e elíptica. O estudo, ancorado em revisão bibliográfica, evidencia como a superação do Quinto Postulado abriu novos horizontes na Matemática, na Filosofia e na Física, especialmente com a teoria da relatividade geral. Simultaneamente, refletimos sobre a importância de inserir de forma introdutória esses conceitos na formação de professores e no contexto escolar, possibilitando que o aluno compreenda a Matemática como uma ciência em constante construção.

Palavras-chave: Quinto Postulado. Geometrias Não-Euclidianas. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

We portray the historical development of Euclid's Fifth Postulate and its influence on the construction of Non-Euclidean Geometries, as well as the implications of this advancement for mathematics teaching. To this end, we trace the trajectory of research, from Euclidean systematization to the studies of Saccheri, Lambert, Gauss, Bolyai, Lobachevsky, and Riemann, highlighting the different paths that led to the formulation of hyperbolic and elliptical geometries. The study, anchored in a literature review, highlights how the overcoming of the Fifth Postulate opened new horizons in mathematics, philosophy, and physics, especially with the theory of general relativity. Simultaneously, we reflect on the importance of introducing these concepts in teacher training and in the school context, enabling students to understand mathematics as a science in constant development.

Keywords: Fifth Postulate. Non-Euclidean Geometries. Mathematics Teaching.

¹ Graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade de Guarulhos (UnG/2010); Especialista em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP/(2006); Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP/ (2009); Professora de Ensino Fundamental II e Médio – Matemática - na EMEF Frei Antônio de Sant'Anna Galvão, Professora de Educação Básica II – Matemática - na EE Bom Pastor II. julianagregorutti@gmail.com

INTRODUÇÃO

A Geometria desempenha um importante papel na formação inicial dos futuros docentes de Matemática, pois proporciona uma base sólida em conceitos geométricos, capacita os professores a abordarem de forma eficaz as diversas situações de ensino e aprendizagem que envolvem o estudo do espaço, das formas e das simetrias.

No entanto, quando abordamos a Geometria Não-Euclidiana, que rompe com o tradicional postulado das paralelas, vemos aplicações importantes em teorias científicas como a Relatividade Geral e em campos como a topologia, funções automorfas, bem como em situações de compreensão do mundo.

Conforme a Base Nacional Comum Curricular, o estudo da Geometria abrange uma variedade de conceitos e procedimentos que são essenciais para a resolução de problemas tanto no mundo físico quanto em diversas áreas do conhecimento.

Dentro desse contexto, o estudo das Geometrias Não-Euclidianas se destaca, pois elas oferecem modelos que, em muitos casos, descrevem o mundo ao nosso redor de forma mais precisa do que o modelo Euclidiano, predominante no ensino básico. Essas geometrias não euclidianas possuem uma dinâmica rica, que permite aos alunos explorarem aspectos geométricos por meio da experimentação e, ao mesmo tempo, fazer comparações com a Geometria Euclidiana, proporcionando uma construção de conhecimento mais ampla e diversificada.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais também destacam a importância do desenvolvimento do pensamento geométrico como um dos principais objetivos do ensino de Matemática. Entre as recomendações, está a criação de situações de aprendizagem que desafiem os alunos a resolver problemas de localização e deslocamento de pontos no espaço, interpretar mapas, estimar e comparar distâncias, reconhecer propriedades de formas geométricas e utilizar diferentes unidades de medida.

Portanto, o estudo das Geometrias Não-Euclidianas oferece um campo promissor para enriquecer o ensino de Geometria. No entanto, ainda são pouco exploradas no ensino básico, principalmente pela falta de materiais didáticos voltados a esse tema, e essa carência reflete a necessidade de valorizar na formação inicial de

professores, para que possamos abordar essas geometrias de maneira mais ampla e eficaz em sala de aula.

Mas, afinal o que é a Geometria Não-Euclidiana? A Geometria Euclidiana, que se baseia em axiomas que parecem naturais ao nosso entendimento intuitivo do espaço, forma a base da geometria tradicional. O mais importante desses axiomas é o *postulado das paralelas*, que afirma que, dada uma reta t e um ponto fora dessa reta, existe uma única reta s que passa por esse ponto sem jamais cruzar a reta t . Esse princípio define uma estrutura geométrica na qual as retas paralelas permanecem equidistantes e nunca se encontram, sendo a base da geometria que usamos no cotidiano para descrever o mundo ao nosso redor.

À medida que avançamos no estudo, veremos que nem todas as geometrias seguem o postulado das paralelas. Isso nos leva ao fascinante campo das **Geometrias Não-Euclidianas**, onde as regras conhecidas não se aplicam da mesma maneira.

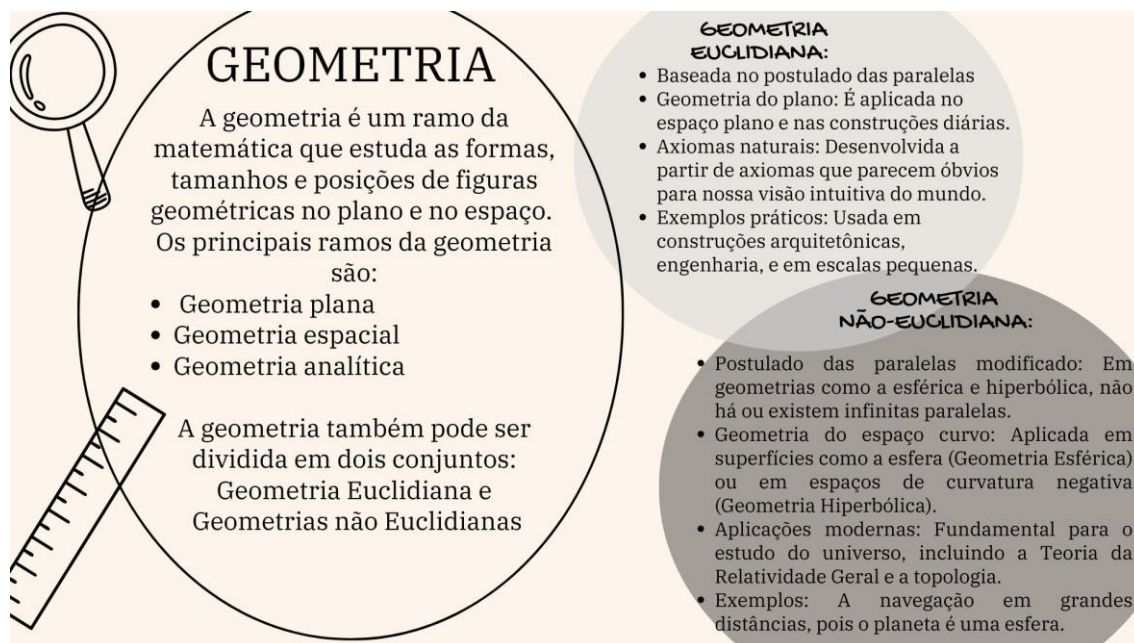


Figura: Mosaico (artista: Escher, 1959) Fonte: [Mosaicos e Arte | João de Ataíde | Flickr](#)

A gravura de Escher, serve maravilhosamente como ponto de partida para compreender as geometrias não-euclidianas, pois nas Geometrias Não-Euclidianas, o postulado das paralelas é substituído por outras concepções do espaço.

Por exemplo, na Geometria Esférica, como a superfície de uma esfera, não existem linhas paralelas, todas as "retas" (grandes círculos) eventualmente se encontram. Na Geometria Hiperbólica, por outro lado, dado um ponto externo a uma

reta, podem existir infinitas retas que passam por esse ponto e não cruzam a reta original. Esses sistemas geométricos não são apenas curiosidades matemáticas; mas têm aplicações importantes em várias áreas da matemática moderna.



Fonte: elaborado pela autora

1. SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

O surgimento das geometrias não euclidianas é um marco na história da matemática, oferecendo novas formas de compreender o espaço e as propriedades das figuras geométricas.

Tradicionalmente, a Geometria Euclidiana é a primeira a ser ensinada e, por muito tempo, foi considerada a única maneira de descrever o espaço. No entanto, as geometrias não euclidianas surgiram ao questionar alguns dos princípios estabelecidos por Euclides, especialmente o Quinto Postulado, ou Postulado das Paralelas. Essas novas abordagens geométricas foram amplamente aceitas no século XIX, após séculos de debates sobre a validade desse postulado.

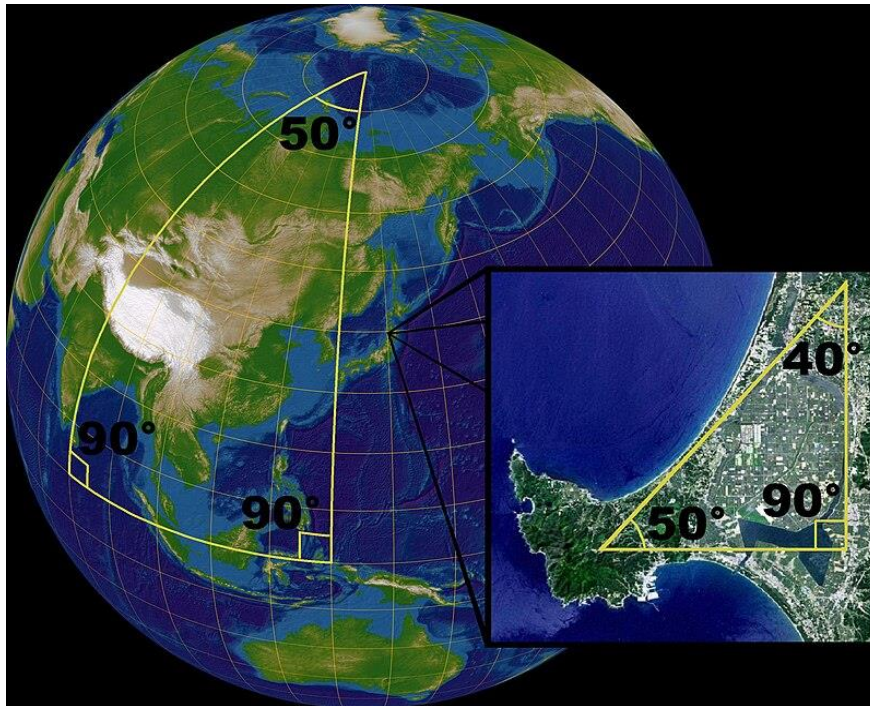


Figura: Paralelas e triângulo no Globo Terrestre

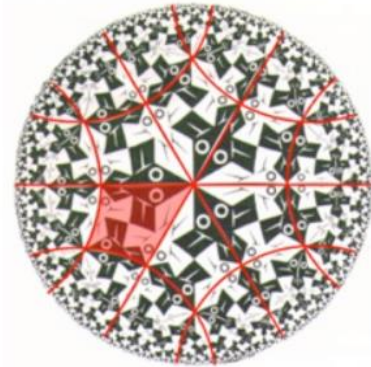
Fonte: https://www.storyofmathematics.com/wpcontent/uploads/2020/01/riemann_elliptic.gif

Observe que numa esfera, como a Terra, a soma dos ângulos internos de um triângulo não é igual a 180° , e também a ideia que as linhas paralelas são equidistantes e nunca se encontram não é válida. Isso ocorre, pois a esfera não é um espaço euclidiano, mas localmente as leis da geometria euclidiana são boas aproximações.

Num pequeno triângulo sobre a face da Terra, a soma dos ângulos internos é muito próxima de 180° , e a superfície de uma esfera pode ser representada por uma coleção de mapas de duas dimensões, portanto uma esfera é uma variedade. Observe nas gravuras de Escher, como o artista trabalhava as Geometrias não Euclidianas em suas obras:



A soma dos ângulos interiores do triângulo é menor que 180 graus!



Pares de retas com um ponto em comum que são paralelas a uma terceira!

Figura: Gravuras de Escher Fonte: [Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas \(usp.br\)](http://Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas (usp.br))

1.1. A GEOMETRIA EUCLIDIANA

A Geometria Euclidiana foi sistematizada por Euclides por volta de 300 a.C. em sua obra *Os Elementos*, que organiza o conhecimento geométrico da época com base em cinco postulados. Esses postulados formam a base para o estudo de figuras planas e espaciais, como pontos, linhas, ângulos e sólidos. Entre os cinco, o Quinto Postulado, que afirma que existe apenas uma linha paralela a uma dada reta que passa por um ponto fora dessa reta, é o mais complexo e gerou questionamentos ao longo dos séculos.

A Geometria Euclidiana, criada por Euclides por volta de 300 a.C., é a base do estudo da geometria que conhecemos hoje, e se sustenta em cinco postulados fundamentais que, apesar de serem aparentemente simples, estabelecem o alicerce de toda a geometria plana e espacial.

Quem foi

Euclides

323 a.C. - 283 a. C.



Euclides de Alexandria, conhecido como o "Pai da Geometria", foi um dos mais importantes matemáticos da Grécia Antiga, influenciando estudos de luz, som, navegação e geometria. Embora haja poucas informações sobre sua vida, acredita-se que tenha nascido no século III a.C., sido educado em Atenas e lecionado na Escola Real de Alexandria. Sua obra mais notável, "Os Elementos", composta por 13 volumes, sistematizou os conhecimentos matemáticos da época e foi amplamente traduzida e estudada até os dias atuais. Seus princípios, incluindo a Geometria Euclidiana, são ensinados até hoje.

Fonte: elaborado pela autora

Os ensinamentos de Euclides foram reunidos em sua famosa obra "Os Elementos", composta por 13 volumes, dos quais os seis primeiros são dedicados à geometria plana. Sua metodologia baseava-se em noções comuns e proposições que, juntas, formavam uma ciência dedutiva rigorosa, usada para resolver problemas de forma lógica.

Euclides, ao compilar e aperfeiçoar os conhecimentos de grandes matemáticos como Pitágoras e Tales, influenciou não apenas a geometria, mas também áreas como aritmética e álgebra.

Mesmo com a simplicidade de seus axiomas e postulados, a Geometria Euclidiana foi o modelo dominante para descrever o espaço físico por mais de dois mil anos.

Somente com o surgimento das geometrias não euclidianas, que questionavam o quinto postulado, a matemática passou a explorar novos horizontes. Isso fez com que as demonstrações e conceitos euclidianos fossem revisados, mantendo sua importância, mas abrindo espaço para novas descobertas e avanços.

1.2. OS AXIOMAS DE EUCLIDES

Os Elementos de Euclides, pela concepção do livro em si, foi considerado como primeiro tratado científico, servindo de modelo para vários ramos da ciência, e pela escolha que fez dos axiomas, ou seja, as afirmações que seriam aceitas como verdadeiras. Os dez axiomas de Euclides foram apresentados em dois grupos: as noções comuns e os postulados, e são eles:

Noções Comuns:

- 1) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- 2) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- 3) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- 4) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais uma à outra.
- 5) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Os Cinco Postulados de Euclides:

A Geometria Euclidiana é baseada em cinco postulados que Euclides estabeleceu como verdades aceitas sem demonstração. São proposições simples que sustentam todo o sistema lógico da geometria plana. Os cinco postulados são:

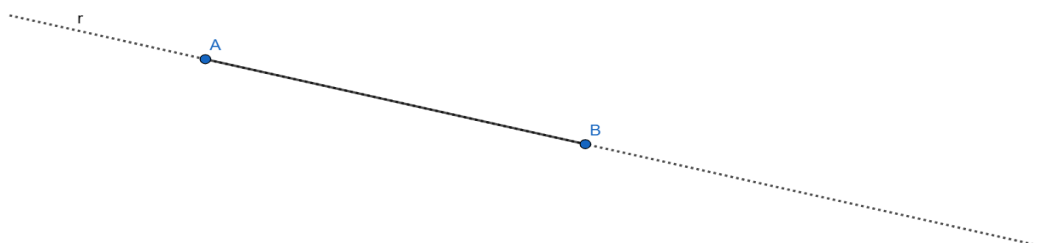
1º Postulado: Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.



Fonte: elaborado pela autora (GeoGebra)

Esse postulado estabelece que, dados dois pontos distintos, é sempre possível traçar uma única linha reta que os conecte. Essa proposição é uma das mais intuitivas e fundamentais da geometria, que define que dois pontos determinam uma reta. O conceito de que dois pontos no espaço são suficientes para definir uma reta permite o desenvolvimento de toda a geometria linear, e é a base para noções como segmentos de reta e o cálculo de distâncias entre dois pontos.

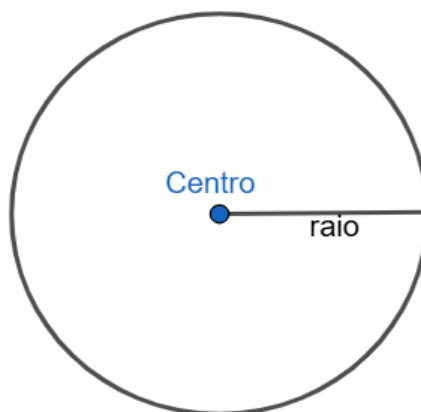
2º Postulado: Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.



Fonte: elaborado pela autora (GeoGebra)

Esse postulado afirma que uma reta, uma vez traçada, pode ser prolongada sem limites em ambas as direções. Ou seja, as retas, na concepção euclidiana, são infinitas, não possuem começo e nem fim, e isso possibilita a criação de representações geométricas contínuas. Esse conceito é essencial para o estudo de retas paralelas e perpendiculares e suas relações no plano.

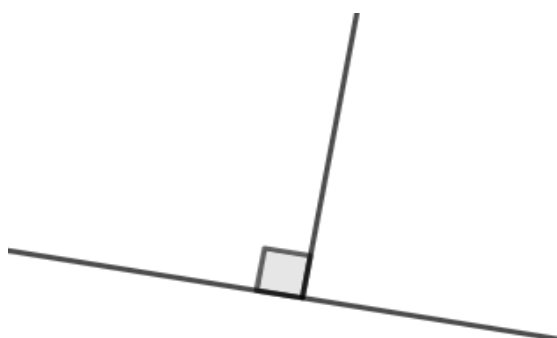
3º Postulado: Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.



Fonte: elaborado pela autora (GeoGebra)

A partir de um ponto e uma distância, pode-se traçar um círculo. De acordo com esse postulado, se temos um ponto qualquer e uma distância, podemos traçar um círculo com esse ponto como centro e a distância como raio.

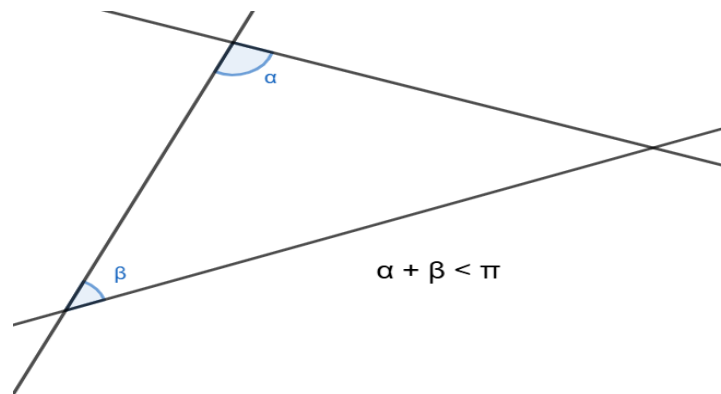
4º Postulado: Todos os ângulos retos são iguais.



Fonte: elaborado pela autora (GeoGebra)

Este postulado estabelece que todos os ângulos retos (de 90°) são iguais, independentemente de sua posição ou tamanho das figuras em que são formados. Isso permite que ângulos retos sejam usados como referência padrão para comparação com outros ângulos, facilitando o estudo da perpendicularidade e das relações entre ângulos em diferentes formas geométricas.

5º Postulado: Se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos interiores, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.



Fonte: elaborado pela autora (GeoGebra)

O Quinto Postulado foi debatido por séculos, pois muitos matemáticos tentaram prová-lo a partir dos outros postulados, sem sucesso, até que surgiram as geometrias alternativas.

Esses postulados, apesar de sua simplicidade, formam o coração da geometria euclidiana e são a base para uma infinidade de teoremas e construções matemáticas. Eles desempenham um papel fundamental na forma como percebemos o espaço e os objetos ao nosso redor, servindo de fundação para o ensino da geometria até os dias atuais.

1.3. O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES

Os postulados como enunciados anteriormente não correspondem exatamente àqueles encontrados nos *Elementos* de Euclides. As modificações refletem a maneira como Euclides realmente os utilizou ao desenvolver as demonstrações dos teoremas, na qual definimos que duas retas distintas são paralelas quando não se interceptam, ou seja, quando não possuem nenhum ponto em comum.

Os *Elementos* foram divididos em 13 volumes, contendo um total de 465 proposições. Ao elaborar essa obra, Euclides introduziu seus postulados de forma progressiva, o Livro I, em particular, foi estruturado em três partes, as primeiras 26 proposições tratam da teoria elementar dos triângulos. A partir da proposição 27 até a 34, Euclides explora a teoria das paralelas, e na última parte, são apresentadas as noções de área de paralelogramos e triângulos, culminando com o famoso teorema de Pitágoras.

Um fato interessante é que o quinto postulado só foi utilizado por Euclides a partir da proposição 29, o que significa que as 28 proposições anteriores foram demonstradas com o uso exclusivo dos primeiros quatro postulados. A seguir, vamos apresentar as proposições 27 e 28 conforme foram enunciadas no Livro I dos *Elementos*.

Proposição I.27: Se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes iguais (β e γ na figura abaixo), então as duas retas são paralelas.

Se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes iguais, então as duas retas são paralelas. Aqui, Euclides está descrevendo uma condição para que duas retas sejam paralelas.

Proposição I.28: Uma reta corta duas outras formando ângulos (como $\alpha + \beta$ na figura abaixo), igual a dois ângulos retos então as duas retas são paralelas.

Se uma reta corta duas outras e a soma de dois ângulos internos é igual a dois ângulos retos, então as duas retas são paralelas. Nesta proposição, Euclides introduz outra maneira de verificar se duas retas são paralelas.

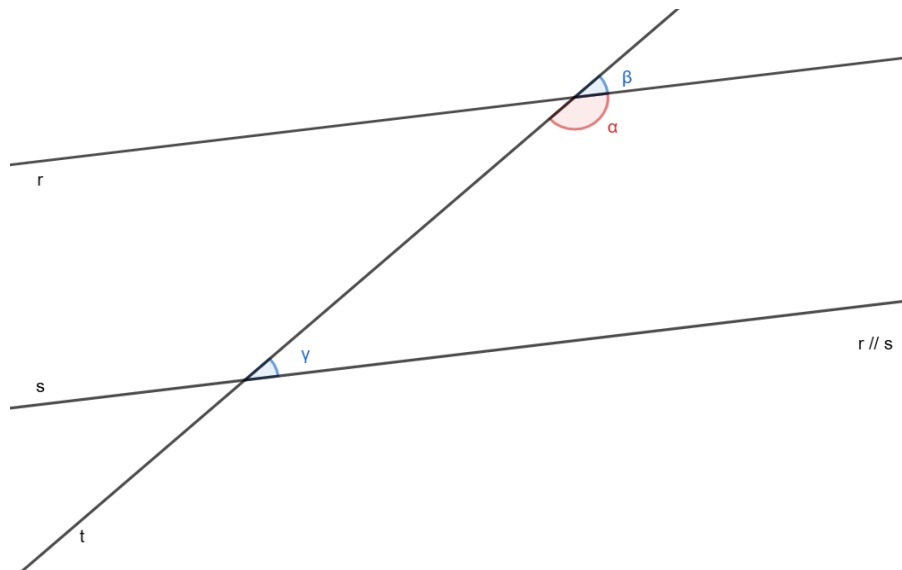


Figura: Proposições I 27 e 28 Fonte: elaborado pela autora (GeoGebra)

As demonstrações dessas proposições foram feitas sem usar o quinto postulado. Com base nas proposições 27 e 28, podemos reformular o quinto postulado de Euclides da seguinte maneira:

Postulado V: Uma linha transversal que cruza duas outras retas, formando ângulos (como os mostrados na figura anterior), faz com que, se a soma dos ângulos α e β for diferente de dois ângulos retos, as duas retas se encontrem.

Essencialmente, o quinto postulado afirma que, se as retas r e s forem paralelas, então $\alpha + \beta$ será igual a dois ângulos retos.

Vale notar que esse postulado é, de certa forma, o inverso da Proposição I.28, desta forma, desde a época de Euclides, o quinto postulado foi alvo de críticas, principalmente por se apresentar de maneira diferente dos outros quatro, inclusive pelo comprimento do seu enunciado, o que levou muitos a acreditarem que Euclides não conseguiu prová-lo adequadamente.

Durante dois mil anos, inúmeras tentativas foram feitas para provar o quinto postulado utilizando apenas os primeiros quatro, e como consequência, surgiram várias afirmações equivalentes a ele, chamadas de "substitutos".

Atualmente, a maioria dos livros de geometria substitui o quinto postulado por uma versão equivalente, pois essas reformulações são geralmente mais simples de entender ou de trabalhar dentro do sistema geométrico tradicional.

Então, até aqui vimos que a Proposição 27 afirma que, se uma linha transversal que corta duas outras linhas faz com que os ângulos alternos internos sejam iguais, então as duas linhas são paralelas, e essa proposição nos dá uma condição suficiente para duas retas serem paralelas: basta que os ângulos alternos internos sejam congruentes.

Já a Proposição 28 estende a Proposição 27, dizendo que, se uma transversal corta duas linhas e faz com que os ângulos correspondentes sejam iguais ou que os ângulos internos do mesmo lado da transversal somem 180 graus, então as duas linhas são paralelas. Aqui, temos outras condições para o paralelismo, a igualdade dos ângulos correspondentes ou ângulos internos do mesmo lado da transversal somando 180°.

Essas proposições não dependem do quinto postulado em si, mas fornecem bases importantes para a compreensão de paralelismo. Elas mostram condições sob as quais duas retas são paralelas sem precisar usar diretamente o quinto postulado. Em contrapartida, o quinto postulado de Euclides, que trata da unicidade da paralela, é mais complexo e se diferencia dos outros quatro por não ser tão evidente e ter

causado muita discussão ao longo da história, o que levou ao desenvolvimento das geometrias não euclidianas.

1.4. O QUINTO POSTULADO E O CAMINHO PARA AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Por muito tempo, matemáticos tentaram provar que o Quinto Postulado poderia ser deduzido dos outros quatro, sem sucesso, mas esse esforço levou à criação de novas geometrias, as chamadas geometrias não euclidianas.

Giovanni Saccheri, no século XVIII, tentou provar a geometria euclidiana ao assumir que o Quinto Postulado era falso, mas, em vez de uma contradição, abriu caminho para novas possibilidades geométricas. No século XIX, matemáticos como Carl Friedrich Gauss, Nikolai Lobachevsky, János Bolyai e Bernhard Riemann desenvolveram sistemas geométricos que não dependiam do Quinto Postulado, dando origem às geometrias hiperbólica e elíptica. Logo, esses estudiosos, ao invés de provar o quinto postulado, exploraram cenários em que ele fosse substituído por diferentes pressupostos, o que gerou resultados revolucionários para a matemática.

Assim, ao nos debruçarmos na história da matemática, concluímos que o Quinto Postulado foi o que mais gerou debates e tentativas de simplificação ao longo dos séculos. Muitos matemáticos, incomodados com a complexidade desse postulado em relação aos outros quatro, tentaram prová-lo como um teorema, partindo dos demais postulados.

A rejeição ou modificação do Quinto Postulado deu origem às geometrias não euclidianas, como a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica, onde a ideia de paralelismo muda radicalmente. Essas geometrias mostraram que o Quinto Postulado não era necessário para uma descrição coerente do espaço, abrindo caminho para uma revolução no pensamento matemático e científico.

A Geometria Não-Euclidiana é um dos marcos mais importantes da história da matemática, pois ela desafia diretamente os pressupostos tradicionais da Geometria Euclidiana, vigente há mais de dois mil anos. O ponto de partida dessa nova geometria está no quinto postulado de Euclides, também chamado de postulado das paralelas. Esse postulado sempre foi considerado menos intuitivo e mais complexo do que os outros quatro postulados propostos por Euclides.

1.4.1. O quinto postulado de Euclides e o início da controvérsia

Vimos que o quinto postulado de Euclides sempre foi objeto de dúvidas e contestações, já que, ao contrário dos outros quatro postulados, não parecia ser uma verdade evidente. Ele descrevia uma característica peculiar das retas paralelas, mas seu status como postulado, e não como um teorema, incomodava muitos matemáticos, e esse incômodo gerou inúmeros esforços, ao longo dos séculos, para tentar demonstrar o quinto postulado a partir dos outros quatro.

Giovanni Girolamo Saccheri, um matemático italiano e padre jesuíta, foi um dos pioneiros nesse esforço. Saccheri utilizou o método de *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo) para tentar provar o postulado das paralelas.



Figura: Saccheri Fonte: [Giovanni... - A hombros de gigantes. Ciencia y tecnología | Facebook](#)

Ele começou analisando uma figura geométrica, hoje conhecida como o "quadrilátero de Saccheri", essa figura é um quadrilátero birretangular isósceles, com dois ângulos retos adjacentes e os lados opostos congruentes.

Saccheri investigou os possíveis casos para os ângulos restantes desse quadrilátero (ângulos agudos, retos ou obtusos) buscando uma contradição para eliminar qualquer possibilidade que não fosse a afirmação do quinto postulado de Euclides. No entanto, sua tentativa de provar o postulado foi inconclusiva, embora tenha aberto caminho para reflexões importantes.

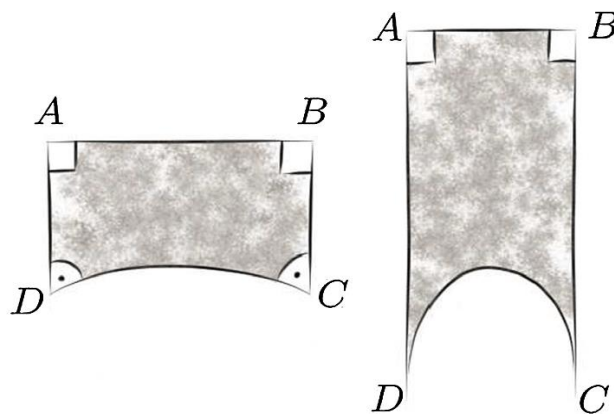


Figura: Quadrilátero de Saccheri Fonte: [A Saccheri quadrilateral \(left\) and an ideal Saccheri quadrilateral \(right\)](#) | [Download Scientific Diagram \(researchgate.net\)](#)

Johann Heinrich Lambert, matemático suíço do século XVIII, também tentou provar o postulado das paralelas.



Figura: Lambert Fonte: [Johann Heinrich Lambert - Revista de Ciência Elementar \(casadasciencias.org\)](#)

Lambert seguiu os passos de Saccheri, utilizando um quadrilátero com três ângulos retos, que hoje chamamos de "quadrilátero de Lambert". Lambert explorou os três casos possíveis para o quarto ângulo (sendo agudo, reto ou obtuso) mas, como Saccheri, não conseguiu provar o quinto postulado de maneira conclusiva.



Figura: Quadrilátero de Lambert Fonte: [Johann Heinrich Lambert - Revista de Ciência Elementar](#)
(casadasciencias.org)

Apesar de todos os esforços para provar o postulado das paralelas, os matemáticos começaram a perceber que talvez o quinto postulado não fosse uma verdade necessária, mas sim uma proposição que poderia ser substituída por outras, e foi a partir dessa ideia que surgiram as Geometrias Não-Euclidianas.

1.4.2. GAUSS E A INTRODUÇÃO DE NOVAS IDEIAS

Carl Friedrich Gauss, um dos maiores matemáticos da história, foi um dos primeiros a levantar a possibilidade de que o quinto postulado de Euclides não poderia ser provado a partir dos outros.

Gauss explorou a ideia de que geometrias diferentes poderiam existir, com sistemas de paralelas distintos, no entanto, devido ao contexto intelectual da época e às implicações filosóficas e religiosas que a aceitação de uma geometria não euclidiana traria, Gauss evitou publicar suas descobertas, mas inspirou outros matemáticos a seguir esse caminho.

1.4.3. BOLYAI E A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

János Bolyai, um jovem matemático húngaro, foi um dos principais responsáveis pela formalização da Geometria Hiperbólica, uma das primeiras formas de Geometria Não-Euclidiana.



Figura: Bolyai Fonte: [Janos Bolyai \(1802-1860\). | Download Scientific Diagram \(researchgate.net\)](#)

Bolyai dedicou sua vida à matemática, influenciado por seu pai, Farkas Bolyai, que era um amigo próximo de Gauss. Ao estudar a questão do quinto postulado, Bolyai optou por substituí-lo por uma hipótese alternativa: em vez de existir uma única reta paralela passando por um ponto fora de uma reta dada, ele propôs que poderiam existir várias paralelas.

Essa substituição levou ao desenvolvimento da Geometria Hiperbólica, onde as retas paralelas se comportam de maneira completamente diferente do que se observa na Geometria Euclidiana. A Geometria Hiperbólica foi uma ruptura radical com as ideias de Euclides e trouxe novas formas de visualizar o espaço.

Após publicar seus trabalhos, Bolyai compartilhou suas descobertas com Gauss, que, em resposta, afirmou que já havia chegado a conclusões semelhantes anos antes, mas não as havia publicado.

1.4.4. LOBACHEVSKY E A DIVULGAÇÃO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Nikolai Ivanovich Lobachevsky, matemático russo, foi um dos primeiros a publicar amplamente suas ideias sobre a Geometria Não-Euclidiana. Lobachevsky desenvolveu de forma independente uma geometria semelhante à de Bolyai, na qual o quinto postulado de Euclides é substituído pela hipótese de que mais de uma reta paralela pode passar por um ponto fora de uma reta dada.



Figura: Lobachevsky Fonte: [Nikolay Ivanovich Lobachevsky | Russian Math Pioneer & Geometer | Britannica](#)

Lobachevsky enfrentou resistência da comunidade científica de sua época, já que sua ideia era vista como uma ruptura com séculos de tradição geométrica. Inicialmente, ele chamou sua nova geometria de "geometria imaginária", refletindo o desafio que a nova concepção espacial representava para os matemáticos e filósofos da época. Mesmo assim, seu trabalho foi fundamental para a aceitação e disseminação das Geometrias Não-Euclidianas no século XIX.

1.4.5. RIEMANN E A GEOMETRIA ELÍPTICA

Georg Friedrich Bernhard Riemann, matemático alemão, trouxe uma abordagem inovadora para o estudo das geometrias alternativas ao Euclidismo, pois ao contrário de Bolyai e Lobachevsky, que trabalharam com a Geometria Hiperbólica (onde há múltiplas paralelas), Riemann focou em uma geometria em que as paralelas simplesmente não existem. Na Geometria Elíptica de Riemann, não há retas paralelas, e a soma dos ângulos de um triângulo é sempre maior que 180 graus.

Figura: Riemann Fonte: [Bernhard Riemann](#) | [Britannica](#)

Riemann abordou as questões geométricas de maneira diferente, propondo que o espaço não é necessariamente plano, como pressupunha a Geometria Euclidiana, mas pode ter curvaturas. Ele estudou o conceito de distância entre pontos infinitamente próximos e, ao fazê-lo, abriu as portas para a criação de uma nova geometria que teria impacto profundo em áreas como a física e a astronomia, especialmente na teoria da relatividade geral de Einstein.

1.5. IMPACTO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

O surgimento das Geometrias Não-Euclidianas não apenas transformou a matemática, mas também abalou profundamente a filosofia da ciência e a forma como entendemos o mundo. A ideia de que o espaço poderia ser curvado, ou que diferentes tipos de espaço geométrico poderiam coexistir, trouxe novos paradigmas para a ciência.

A filosofia kantiana, por exemplo, que baseava-se em grande parte na concepção de que o espaço era absoluto e intuitivo² a priori, foi diretamente desafiada pelas novas geometrias. Assim como a descoberta dos números irracionais foi um

² Segundo dicionário, **intuitivo** (adjetivo de dois gêneros): Que se pode intuir (ex.: *o que aconteceu era intuitivo há muito tempo*).

golpe devastador para os pitagóricos, as Geometrias Não-Euclidianas abalaram a filosofia espacial de Kant.

Essas novas geometrias também foram fundamentais para o desenvolvimento da física moderna, e a Geometria Riemanniana, em particular, tornou-se um componente chave da teoria da relatividade geral de Albert Einstein, que descreve como a gravidade é a curvatura do espaço-tempo. Dessa forma, o trabalho de Riemann influenciou diretamente a compreensão do universo físico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento das Geometrias Não-Euclidianas foi um dos avanços mais significativos da história da matemática. Ao substituir o quinto postulado de Euclides por diferentes hipóteses, matemáticos como Gauss, Bolyai, Lobachevsky e Riemann mostraram que existiam outras formas de entender o espaço, e essas descobertas não só revolucionaram a geometria, como também abriram caminho para o surgimento de novas teorias na física e outras áreas do conhecimento.

O impacto filosófico, científico e matemático dessas geometrias continua a ser sentido até hoje, mostrando que o questionamento de pressupostos aparentemente sólidos pode levar a novas e surpreendentes descobertas.

Assim, trazer esses conceitos, ainda que de forma introdutória, para a formação docente e para a sala de aula pode ampliar a compreensão dos estudantes sobre a matemática como uma ciência em constante construção.

BIBLIOGRAFIA

BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta c. História da matemática. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRUM, Wanderley Pivatto; SCHUHMACHER, Elcio; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da. As Geometrias Esférica e Hiperbólica em Foco: sobre a Apresentação de alguns de seus Conceitos Elementares a Estudantes do Ensino Médio. Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 419-427, abr. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51r03>.

CARMO, Manfredo Perdigão. Geometria diferencial de curvas e superfícies. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

CARTAS, Cátia Vanessa Oliveira. *A Geometria de Lobachevsky*. Departamento de Matemática, Faculdade de Ciência e Tecnologia, Universidade de Coimbra, 2013.

EUCLIDES. Os elementos. São Paulo: Unesp, 2009. 600 p. [2] Barbosa, João Lucas Marques. Geometria euclidiana plana. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LAMMOGLIA, Bruna; RODRIGUES, Claudina Izepe. Geometria Elíptica e Geometria Esférica. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNICAMP, 11., 2003, Campinas. Anais [...]. Campinas: UNICAMP, 2003. Disponível em: <https://prp.unicamp.br/pibic/congressos/xicongresso/cdrom/pdfN/18.pdf>. Acesso em: 2 set. 2025.

MLODINOW, Leonard. A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. 2. ed. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

PINA, Romildo da Silva. O V postulado de Euclides. Revista da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás, n. 1, p. 101, 2000.

SANTOS, W. T. A história do quinto postulado, as geometrias não-euclidianas e suas implicações no pensamento científico. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) — Curso de Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, 2016. Disponível em: https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_licenciatura/TCC_Wellington_2016.pdf

VIEIRA, C. A. N.; BATISTA, E. B.; TAVARES, L. S. Explorando conceitos de geometria não-euclidiana com softwares de geometria dinâmica. C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 18, p. 37–48, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvol18202023169664canvebblst3748. Disponível em: www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista-cqd/